CAPÍTULO 13

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

13.1 Introdução

A função identidade em $\mathbb{R}^n$ é a função que a cada elemento de $\mathbb{R}^n$ associa o próprio elemento, i.e.

$$\begin{array}{ccc} I_d : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & I_d(X) = X = (x_1, ..., x_n) \end{array}.$$

A função identidade é trivialmente uma função linear e é representada na forma matricial pela matriz identidade $n \times n$, denotada por I_n.

Dadas duas funções $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ e $G : B \subseteq \mathbb{R}^m \to A \subseteq \mathbb{R}^n$, dizemos que F e G são *funções inversas* uma da outra se

$$(G \circ F)(X) = X, \quad \forall \ X \in A$$

e

$$(F \circ G)(Y) = Y, \quad \forall \ Y \in B.$$

Ou seja, F e G são funções inversas uma da outra se

$$F \circ G = I_{dA} \text{ e } G \circ F = I_{dB},$$

onde I_{dA} é a função identidade restrita ao conjunto A, i.e. $I_d : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$ e I_{dB} é a função identidade restrita ao conjunto B, i.e. $I_d : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$. Observe que o domínio de F é a imagem de G e que a imagem de F é o domínio de G.

É usual denotarmos G por F^{-1} e, neste caso, temos que

$$F^{-1}(Y) = X \quad \forall \ Y \in B \Longleftrightarrow F(X) = Y \quad \forall \ X \in A.$$

Exemplo 13.1.1: Abaixo temos exemplos conhecidos de funções da reta na reta e suas inversas.

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2, & x \geq 0 \\ f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}, & y \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_2(x) = e^x, & x \in \mathbb{R} \\ f_2^{-1}(y) = \ln y, & y > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_3(x) = x^3, & x \in \mathbb{R} \\ f_3^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}, & y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

$$\begin{cases} f_4(x) = \operatorname{sen} x, & -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ f_4^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y, & -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f_5(x) = \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ f_5^{-1}(y) = \arccos y, & -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Lembre-se que uma função F é inversível em sua imagem, se e somente se, F é injetora. Ou seja, F é inversível em sua imagem, se e só se,

$$F(X_1) = F(X_2) \Longleftrightarrow X_1 = X_2.$$

Dada a função linear injetora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, é fácil verificar que sua inversa L^{-1} também é linear. Isto é, dado que $L(X_1) = Y_1$ e $L(X_2) = Y_2$ ao calcular $L^{-1}(aY_1 + bY_2)$, onde a e b são reais quaisquer, temos que $L^{-1}(aY_1 + bY_2) = aL^{-1}(Y_1) + bL^{-1}(Y_2)$. De fato,

$$\begin{aligned} L^{-1}(aY_1 + bY_2) &= L^{-1}(aL(X_1) + bL(X_2)) \\ &\overset{*}{=} L^{-1}(L(aX_1 + bX_2)) \\ &\overset{**}{=} aX_1 + bX_2 \\ &= aL^{-1}(Y_1) + bL^{-1}(Y_2), \end{aligned}$$

onde a igualdade em (*) se deve ao fato de L ser linear e a igualdade em (**) se deve ao fato de L e L^{-1} serem inversas uma da outra.

Observe que se n é menor do que m, a imagem da função linear injetora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é um subespaço próprio de $\mathbb{R}^m$. E, neste caso, L^{-1} não está definida em todo $\mathbb{R}^m$, estando apenas definida na imagem de L. Por outro lado, se $m = n$, a inversa está definida em todo $\mathbb{R}^n$. Além disso, se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função linear inversível representada pela matriz A, i.e. $L(X) = A.X$, onde (.) é uma multiplicação matricial, a inversa de L, $L^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é a função linear inversível representada pela matriz A^{-1}, i.e. $L^{-1}(X) = A^{-1}.\, X$, onde A^{-1} é a inversa da matriz A.

Considere agora a função afim $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$T(X) = L(X - X_0) + Y_0 = A.\,(X - X_0) + Y_0,$$

onde $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função linear. É fácil ver que T é injetora, se e só se, L é injetora. De fato, dados $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} T(X_1) = T(X_2) &\Leftrightarrow L(X_1 - X_0) + Y_0 = L(X_2 - X_0) + Y_0 \\ &\Leftrightarrow L(X_1 - X_0) = L(X_2 - X_0) \Leftrightarrow L(X_1) - L(X_0) = L(X_2) - L(X_0) \\ &\Leftrightarrow L(X_1) = L(X_2). \end{aligned}$$

Além disso, observe que se L é uma função linear inversível representada pela matriz A, i.e. $L(X) = A.X$, onde (.) é uma multiplicação entre matrizes, a função afim T,

$T(X) = L(X - X_0) + Y_0 = A.\,(X - X_0) + Y_0$ também é inversível e, se $T(X) = Y$, a inversa de T é dada por

$$T^{-1}(Y) = L^{-1}(Y - Y_0) + X_0 = A^{-1}.\,(Y - Y_0) + X_0$$

Podemos verificar que a expressão dada acima é de fato a expressão correta para T^{-1}, substituindo Y por $T(X)$ e verificando que encontramos X. De fato,

$$\begin{aligned} T^{-1}(Y) &= T^{-1}(T(X)) = L^{-1}(T(X) - Y_0) + X_0 \\ &= L^{-1}(L(X - X_0) + Y_0 - Y_0) + X_0 \\ &= L^{-1}(L(X - X_0)) + X_0 \\ &= X - X_0 + X_0 \\ &= X. \end{aligned}$$

Os cálculos acima, utilizando matrizes, são expressos da forma abaixo.

$$\begin{aligned} T^{-1}(Y) &= T^{-1}(T(X)) = A^{-1}.\,(T(X) - Y_0) + X_0 \\ &= A^{-1}.\,(A.(X - X_0) + Y_0 - Y_0) + X_0 \\ &= A^{-1}.\,(A.(X - X_0)) + X_0 \\ &= X - X_0 + X_0 \\ &= X. \end{aligned}$$

Com isto, temos uma fórmula que permite calcular a inversa de uma função afim inversível dada por

$$T(X) = L(X - X_0) + Y_0 = A.\,(X - X_0) + Y_0,$$

que é

$$T^{-1}(Y) = L^{-1}(Y - Y_0) + X_0 = A^{-1}.\,(Y - Y_0) + X_0. \tag{1}$$

Exemplo 13.1.1: Considere a função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 2 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que T é inversível.
b) Se $T(x, y, z) = (u, v, w)$, determine $T^{-1}(u, v, w)$.

Solução: $T(X) = A.\,(X - X_0) + Y_0$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, como T é uma função afim, temos que T é inversível se e somente se a função linear L dada por

$$L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

é inversível. Por sua vez, L é inversível se e somente se a matriz A é inversível. Como determinante de A é diferente de zero ($det(A) = 1$), temos que L é inversível e sua inversa é dada por

$$L^{-1}(u,v,w) = A^{-1}. \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Abaixo, temos o cálculo de A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{l_1 = l_1 - l_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_3 = l_3 - 2l_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_3 = -l_3/3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_2 = l_2 + 3l_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_1 = l_1 - 3l_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_2 = l_2/2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

Neste caso, como T^{-1} é dada por

$$T^{-1}(Y) = L^{-1}(Y - Y_0) + X_0 = A^{-1}.(Y - Y_0) + X_0,$$

segue que

$$T^{-1}(u,v,w) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-2 \\ v+3 \\ w-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\heartsuit$

Nosso objetivo na próxima seção é enunciar o Teorema da Função Inversa. Dada uma função vetorial de várias variáveis, $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to Im(F) \subseteq \mathbb{R}^n$, sob certas condições, o Teorema da Função Inversa é capaz de garantir que F possui uma inversa e ainda fornece propriedades desta inversa. Mas especificamente, o teorema trata do caso em que F é diferenciável e fornece resultados apenas locais. Para compreender melhor o teorema, acompanhe a seguinte linha de raciocínio: lembre-se que se F é diferenciável no ponto X_0, ela pode ser aproximada numa vizinhança deste ponto por uma transformação afim T. Portanto, uma pergunta natural que surge é: "será que se a transformação afim T for inversível, também poderemos garantir que, numa vizinhança do ponto X_0, a função F também é inversível?, uma vez que nesta vizinhança as duas funções "se parecem". " Além disso, podemos nos questionar também: "e se for verdade que a função F é realmente inversível numa vizinhança do ponto X_0, será que podemos garantir que sua inversa também é diferenciável no ponto X_0?" E, podemos ir até mais além: "será que se a inversa da função F for diferenciável em X_0, sua melhor aproximação afim numa vizinhança deste ponto será a inversa de T? Ou seja, será que a matriz que representa a derivada da inversa de F em X_0 (no caso dela existir), é a inversa da matriz que representa a derivada de F em X_0?" A menos dos "detalhes", estas perguntas possuem respostas afirmativas e constituem o *Teorema da Função Inversa* que, conforme dito, está enunciado na próxima seção.

13.2 Teorema da Função Inversa

TEOREMA 13.2.1 (Teorema da Função Inversa): Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 em um aberto $A \subseteq Dom(F)$ que contém ponto X_0. Se $DF(X_0)$ é inversível, então, existe um aberto $N \subseteq A$, contendo X_0, tal que, quando restrita a N, F possui uma inversa de classe C^1. Além disso, o conjunto imagem $F(N)$ é aberto e mais ainda,

$$DF^{-1}(Y_0) = \left(DF(X_0)\right)^{-1},$$

onde $Y_0 = F(X_0)$. Isto é, a diferencial da função inversa de F em Y_0 é a inversa da diferencial de F em X_0.

Observe que o Teorema da Função Inversa só garante a existência da inversa de F (caso as condições sejam satisfeita) numa vizinhança do ponto X_0. Ele é um teorema de existência local e não global. O similar que vimos em Cálculo 1A, pedia derivada diferente de zero em todo intervalo. Por isso, podíamos garantir a existência da inversa na imagem deste intervalo sob consideração. O Teorema da Função Inversa visto em Cálculo 1A, para efeito de recordação, encontra-se enunciado na Seção 13.4.

Note que Teorema da Função Inversa fornece condições SUFICIENTES (F de classe C^1 e $DF(X_0)$ é inversível) para garantir a existência de uma inversa na vizinhança do ponto X_0. Isto não quer dizer que é necessário que $DF(X_0)$ seja inversível para que exista uma inversa. De fato, voltando a funções reais, é sabido que a função $F(x) = x^3$ tem derivada nula na origem, portanto não inversível, mas é F possui inversa numa vizinhança do ponto $x = 0$. De fato, ela possui inversa em toda reta.

13.3 Exemplos

Exemplo 13.3.1: Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y) = \left(x^3 - 2xy^2, x + y\right).$$

a) Mostre que F é inversível numa vizinhança do ponto $(1,-1)$.
b) Verifique que $F(1,-1) = (-1,0)$.
c) Determine $DF^{-1}(-1,0)$.

Solução:

a) Observe que $F(x,y) = (f_1(x,y)\,,\, f_2(x,y))$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, uma vez que suas funções coordenadas f_1 e f_2 são polinomiais. Além disso, como

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y^2 & -4xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos que

$$DF(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que é uma matriz inversível, pois $\det(DF(1,-1)) = -3 \neq 0$. Desta forma, pelo Teorema da Função Inversa, temos que existe um aberto N, contendo o ponto $(1,-1)$, tal que, quando restrita a N, a função F possui uma inversa de classe C^1.

b) É fácil ver que $F(1,-1) = (1-2\,,\,1-1) = (-1,0)$.

c) Também do Teorema da Função Inversa, temos que

$$DF^{-1}(-1,0) = (DF(1,-1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Abaixo, temos o cálculo de $(DF(1,-1))^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1 - l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1/3}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_2 - l_1}{\sim}$$

$$\overset{l_2 - l_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \end{array}\right) \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

$\heartsuit$

Exemplo 13.3.2: Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y) = \left(x^3 + 2xy + y^2\ ,\ x^2 + y\right).$$

a) Mostre que F é inversível numa vizinhança do ponto $(1,1)$.
b) Sabendo que $F(1,1) = (4,2)$, determine $DF^{-1}(4,2)$.
c) Determine a função afim que melhor aproxima a função F numa vizinhança do ponto $(1,1)$.
d) Determine a função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(4,2)$.

Solução:

a) Observe que $F(x,y) = (f_1(x,y)\,,\, f_2(x,y))$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, uma vez que suas funções coordenadas f_1 e f_2 são polinomiais. Além disso, como

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y & 2x + 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix},$$

temos que

$$DF(1,1) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

que é uma matriz inversível, pois $\det(DF(1,1)) = -3 \neq 0$. Desta forma, pelo Teorema da Função Inversa, temos que existe um aberto N, contendo o ponto $(1,1)$, tal que, quando restrita a N, a função F possui uma inversa de classe C^1.

b) É fácil ver que $F(1,1) = (1+2+1\,,\,1+1) = (4,2)$. Além disso, do Teorema da Função Inversa, temos que

$$DF^{-1}(4,2) = (DF(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}.$$

Abaixo temos o cálculo de $(DF(1,-1))^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1-4l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1/(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_2-2l_1}{\sim}$$

$$\overset{l_2-2l_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -5/3 \end{array}\right).$$

c) Sabemos que função afim que melhor aproxima a a função F numa vizinhança do ponto $(1,1)$ é dada por

$$\begin{aligned} T(x,y) &= DF(1,1).\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5x-5+4y-4 \\ 2x-2+y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5x+4y-5 \\ 2x+y-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Sabemos que função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(4,2)$ é dada por

$$T_1(u,v) = T^{-1}(u,v) = DF^{-1}(4,2).\begin{pmatrix} u-4 \\ v-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$DF^{-1}(4,2) = (DF(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix},$$

temos que a função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(4,2)$ é dada por

$$\begin{aligned} T_1(u,v) &= \begin{pmatrix} -1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u-4 \\ v-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u/3+4/3+4v/3-8/3 \\ 2u/3-8/3-5v/3+10/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u/3+4v/3-1/3 \\ 2u/3-5v/3+5/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

♡

Exemplo 13.3.3: Seja

$$F(u,v) = \left(u^2+u^2v+10v\ ,\ u+v^3\right).$$

a) Mostre que F é inversível numa vizinhança do ponto $(1,1)$.
b) Calcule um valor aproximado para $(F^{-1})(11.8, 2.1)$.

Solução:

a) Observe que $F(u,v) = (f_1(u,v)\ ,\ f_2(u,v))$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, uma vez que suas funções coordenadas f_1 e f_2 são polinomiais. Além disso, como

$$DF(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u+2uv & u^2+10 \\ 1 & 3v^2 \end{pmatrix},$$

temos que

$$DF(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

que é uma matriz inversível, pois $\det(DF(1,1)) = 1 \neq 0$. Desta forma, pelo Teorema da Função Inversa, temos que existe um aberto N, contendo o ponto $(1,1)$, tal que, quando restrita a N, a função F possui uma inversa de classe C^1.

b) É fácil ver que $F(1,1) = (1+1=10\,,\,1+1) = (12,2)$. Além disso, sabemos que função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(12,2)$ é dada por

$$T_1(x,y) = T^{-1}(x,y) = DF^{-1}(12,2).\begin{pmatrix} x-12 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde T é a transformação afim que melhor aproxima F numa vizinhança do ponto $(1,1)$. Para determinar $DF^{-1}(12,2)$, utilizamos o Teorema da Função Inversa, que diz que

$$DF^{-1}(12,2) = (DF(1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Abaixo temos o cálculo de $(DF(1,1))^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 11 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1-4l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_2+3l_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & -11 \end{array}\right) \overset{-l_1}{\sim}$$

$$\overset{-l_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -11 \end{array}\right) \overset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Portanto, a função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $(12,2)$ é dada por

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-12 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(x-12) - 11(y-2) + 1 \\ -(x-12) + 4(y-2) + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

de modo que um valor aproximado para $(F^{-1})(11.8, 2.1)$ é dado por $T_1(11.8, 2.1)$. Isto é,

$$\begin{aligned} (F^{-1})(11.8, 2.2) \approx T_1(11.8, 2.1) &= \begin{pmatrix} 3(11.8-12) - 11(2.1-2) + 1 \\ -(11.8-12) + 4(2.1-2) + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(-0.2) - 11(0.1) + 1 \\ -(-0.2) + 4(0.1) + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.6 - 1.1 + 1 \\ 0.2 + 0.4 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.7 \\ 1.6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\heartsuit$

Exemplo 13.3.4: Considere a função $f(u,v) = (u^3 v \ , \ 2v^2 - 6u^2 \ , \ 3uv \ , \ u^2 + v^2)$. Seja $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 e seja F a função definida por $F = g \circ f$. Sabe-se que $g(2,2,6,5) = (2,3)$ e que $g'(2,2,6,5)$ é uma das matrizes a seguir:
$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Verifique que F possui uma inversa de classe C^1 numa vizinhança do ponto $(1,2)$. Justifique bem.

b) Denote por F^{-1} a inversa de F numa vizinhança do ponto $(1,2)$. Determine a função afim que melhor aproxima F^{-1} numa vizinhança do ponto $F(1,2)$.

Solução:
a) Em primeiro lugar, observe que g é uma função de classe C^1, por hipótese, o que significa que g é diferenciável. Da mesma forma, temos que f é de classe C^1, pois suas funções coordenadas são polinomiais, o que significa que f também é diferenciável. Sendo assim, como f e g são diferenciáveis, temos que $F = g \circ f$ é diferenciável e, além disso, podemos aplicar a regra da cadeia para obter $DF(1,2)$. No Exemplo 12.4.2, obtivemos que

$$\begin{aligned} DF(1,2) &= Dg(f(1,2)).Df(1,2) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Além de $F = g \circ f$ ser diferenciável, F também é de classe C^1, pois f e g são de classe C^1. Desta forma, como F é de classe C^1 e $DF(1,2)$ é uma matriz inversível, pois $\det(DF(1,2)) = -2 \neq 0$, temos, pelo Teorema da Função Inversa, temos que existe um aberto N, contendo o ponto $(1,2)$, tal que, quando restrita a N, a função F possui uma inversa de classe C^1.

b) É fácil ver que $F(1,2) = g(f(1,2)) = g(2,2,6,5) = (2,3)$, conforme calculado no Exemplo 12.4.2. Além disso, sabemos que função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $F(1,2) = (2,3)$ é dada por

$$\begin{aligned} T(x,y) &= F^{-1}(F(1,2)) + DF^{-1}(F(1,2)) . \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (DF(1,2))^{-1} . \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Abaixo temos o cálculo de $(DF(1,2))^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} -2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{l_1+5l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} -2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-l_2/2}{\sim} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Portanto, a função afim que melhor aproxima a inversa da função F numa vizinhança do ponto $F(1,2) = (2,3)$ é dada por

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2(x-2) - 5/2(y-3) \\ y-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - x/2 + 1 - 5y/2 + 15/2 \\ 2 + y - 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x/2 - 5y/2 + 19/2 \\ y-1 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

♡

13.4 Recordação de Cálculo 1

Vamos a seguir fazer uma recordação do Teorema da Função Inversa visto em Cálculo 1, não só para efeito de comparação, como também para ilustração, uma vez que para funções da reta na reta o entendimento fica mais fácil.

TEOREMA 13.4.1: (Teorema da Função Inversa - Funções da Reta na Reta (Visto em Cálculo 1A)) Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $I \subseteq Dom(f)$ um intervalo aberto. Se $f'(c) \neq 0$ para todo $c \in I$, então f é inversível na imagem de I (cuja notação é $f(I)$), sua inversa $f^{-1} : f(I) \to Dom(f)$ é diferenciável e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

para todo $y \in f(I)$.

Não demonstramos este teorema em Cálculo 1A, mas fizemos algumas considerações que mostram que o que ele afirma é de uma certa forma natural. De fato, ao impedirmos a derivada da função f de se anular, estamos obrigando f a ser injetora, pois a única forma de uma função diferenciável perder a injetividade, é possuir um gráfico que tenha em algum ponto uma reta tangente horizontal, que é sinônimo de derivada nula neste ponto, mas isto está excluído por hipótese. Tendo assim garantido a existência da inversa, pela reflexão do gráfico de f em torno da reta $y = x$, construímos o gráfico da função inversa. Observe agora que, por f ser diferenciável, todos os pontos de seu gráfico possuem reta tangente. Inclusive, por não possuir derivada nula, nenhuma reta tangente é horizontal. Voltando agora ao gráfico da função inversa, verificamos que ele, por ser uma reflexão do gráfico de f em torno da reta $y = x$ também possuirá reta tangente em todos os pontos. Além disso, sabemos que o único caso em que existe reta tangente mas não existe derivada, é quando a reta tangente é vertical. Entretanto, a reta tangente da gráfico da função inversa só poderia ser vertical se o gráfico da função

f fosse horizontal em algum ponto, o que foi excluído por hipótese. Deste modo, podemos concluir que a inversa é diferenciável.

O similar ao Teorema da Função Inversa na forma que estamos vendo agora, obviamente também pode ser restrito a funções de uma variável e, neste caso, ele também só garante a existência da inversa localmente. E, neste caso, para demonstrar a existência da inversa, utilizamos o Teorema do Valor Médio. Vamos enunciar abaixo o Teorema da Função Inversa (na forma local) para funções da reta na reta.

TEOREMA 13.2.3 (Teorema da Função Inversa - Existência Local - Funções da Reta na Reta): Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em um intervalo aberto $J \subseteq Dom(f)$ que contém ponto x_0. Se $f'(x_0) \neq 0$, então, existe um intervalo aberto $I \subseteq J$, contendo x_0, tal que, quando restrita a I, f possui uma inversa de classe C^1. Além disso, o conjunto imagem $f(I)$ é aberto e, mais ainda,

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1} \,,$$

onde $y_0 = f(x_0)$. Isto é, a derivada da função inversa em y_0 é a inversa da derivada de f em x_0.

Observe que sendo f uma função de classe C_1, sua derivada é contínua; portanto, como $f'(x_0) \neq 0$, pela continuidade de f', segue que em um intervalo aberto contendo x_0, podemos garantir que f' não se anula. Agora é só repetir o raciocínio feito acima para este intervalo. Atenção isto não é uma demonstração. Este raciocínio tem o intuito de nos convencer do quanto o teorema é razoável e de estabelecer uma linha para a demonstração. Por exemplo, conforme já foi dito, para demonstrar a existência da inversa, utilizamos o Teorema do Valor Médio.